

Optimisation d'un processus d'épandage d'engrais

Jonas Koko & Teddy Virin

LIMOS UMR 6158 CNRS – UCA

Séminaire Model. Dev. Durable 7/12/18

Plan

- 1 Motivation
- 2 Modélisation
- 3 Discrétisation
- 4 Résultats numériques
- 5 Perspectives

Motivation

Défauts de fertilisation : Sous-dosage et Sur-dosage

Sur-dosage \implies pollution des eaux

Sous-dosage \implies baisse de rendement

Objectif

Minimiser les défauts de fertilisation

Motivation

Défauts de fertilisation : Sous-dosage et Sur-dosage

Sur-dosage \implies pollution des eaux

Sous-dosage \implies baisse de rendement

Objectif

Minimiser les défauts de fertilisation

Hypothèses

- Ω champ rectangulaire ou polygonal
- trajectoire du tracteur $s(t) = (s_1(t), s_2(t))$ rectiligne prédéterminée
- vitesse du tracteur constante

Pour $x = (x_1, x_2) \in \Omega$

- $r(x, t)$ distance entre le centre du disque d'épandage et x
- $\theta(x, t)$ angle formé par $\overrightarrow{s(t)x}$ et $s(t)$



Hypothèses

- Ω champ rectangulaire ou polygonal
- trajectoire du tracteur $s(t) = (s_1(t), s_2(t))$ rectiligne prédéterminée
- vitesse du tracteur constante

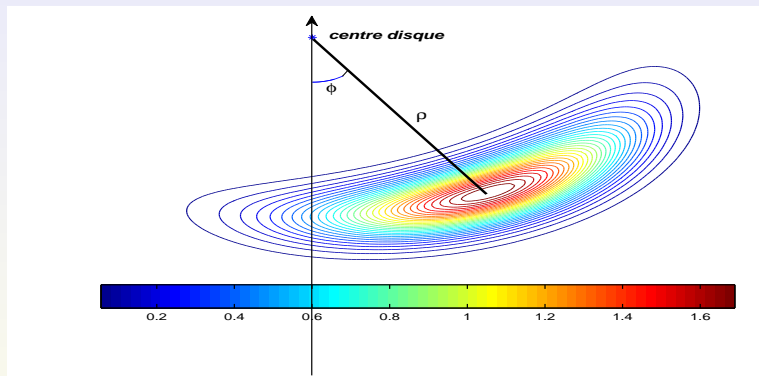
Pour $x = (x_1, x_2) \in \Omega$

- $r(x, t)$ distance entre le centre du disque d'épandage et x
- $\theta(x, t)$ angle formé par $\overrightarrow{s(t)x}$ et $s(t)$



Repartition

Modélisation simplifiée de la nappe de repartition (Colin 97)



- $d : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ le débit (en kg/s) ;
- $\rho : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ le rayon moyen de distribution (en m) ;
- $\phi : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, l'angle moyen de distribution (en $^\circ$) ;

Repartition II

$$q(x, d(t), \rho(t), \phi(t)) = \frac{d(t)}{2\pi\sigma_r\sigma_\theta} \exp \left[-\frac{(r(x, t) - \rho(t))^2}{2\sigma_r^2} - \frac{(\theta(x, t) - \phi(t))^2}{2\sigma_\theta^2} \right]$$

Dispositif d'épandage comporte deux disques (gauche+droite) :

$$q(x, d, \rho, \phi) = q_1(x, d_1, \rho_1, \phi_1) + q_2(x, d_2, \rho_2, \phi_2)$$

Notations :

$$y(t) = (d(t), \rho(t), \phi(t)) \quad q(x; y(t)) = q_1(x; y(t)) + q_2(x; y(t))$$

Dose d'engrais reçue au temps $t > 0$

$$u(x; y(t)) = \int_0^t q(x; y(\tau)) d\tau$$

Repartition II

$$q(x, d(t), \rho(t), \phi(t)) = \frac{d(t)}{2\pi\sigma_r\sigma_\theta} \exp \left[-\frac{(r(x, t) - \rho(t))^2}{2\sigma_r^2} - \frac{(\theta(x, t) - \phi(t))^2}{2\sigma_\theta^2} \right]$$

Dispositif d'épandage comporte deux disques (gauche+droite) :

$$q(x, d, \rho, \phi) = q_1(x, d_1, \rho_1, \phi_1) + q_2(x, d_2, \rho_2, \phi_2)$$

Notations :

$$y(t) = (d(t), \rho(t), \phi(t)) \quad q(x; y(t)) = q_1(x; y(t)) + q_2(x; y(t))$$

Dose d'engrais reçue au temps $t > 0$

$$u(x; y(t)) = \int_0^t q(x; y(\tau)) d\tau$$

Repartition II

$$q(x, d(t), \rho(t), \phi(t)) = \frac{d(t)}{2\pi\sigma_r\sigma_\theta} \exp \left[-\frac{(r(x, t) - \rho(t))^2}{2\sigma_r^2} - \frac{(\theta(x, t) - \phi(t))^2}{2\sigma_\theta^2} \right]$$

Dispositif d'épandage comporte deux disques (gauche+droite) :

$$q(x, d, \rho, \phi) = q_1(x, d_1, \rho_1, \phi_1) + q_2(x, d_2, \rho_2, \phi_2)$$

Notations :

$$y(t) = (d(t), \rho(t), \phi(t)) \quad q(x; y(t)) = q_1(x; y(t)) + q_2(x; y(t))$$

Dose d'engrais reçue au temps $t > 0$

$$u(x; y(t)) = \int_0^t q(x; y(\tau)) d\tau$$

Fonction coût

Dose reçue au temps T : $u(x; y(T))$

Dose consigne : $u_c(x)$

But de l'optimisation

Minimiser l'écart entre dose reçue et dose consigne

Fonction coût

$$E(y) = \frac{1}{2} \| u(y) - u_c \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \| y \|_{L^2(0,T)}^2$$

Fonction coût

Dose reçue au temps T : $u(x; y(T))$

Dose consigne : $u_c(x)$

But de l'optimisation

Minimiser l'écart entre dose reçue et dose consigne

Fonction coût

$$E(y) = \frac{1}{2} \| u(y) - u_c \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \| y \|_{L^2(0, T)}^2$$

Contraintes

Ensemble des paramètres admissibles :

$$K = \left\{ y \in (C^{0,1}(0, T))^6, |y_\ell(t)| \leq a_\ell, |y'_\ell(t)| \leq b_\ell, \ell = 1, \dots, 6 \right\}$$

a_ℓ, b_ℓ constantes positives telles que $K \neq \emptyset$.

Problème d'optimisation

$$\min_{y \in K} E(y)$$

- E continue, non convexe
- K compact de $Y = (C^0(0, T))^6$

Théorème

Il existe au moins une solution au problème d'optimisation

Contraintes

Ensemble des paramètres admissibles :

$$K = \left\{ y \in (C^{0,1}(0, T))^6, |y_\ell(t)| \leq a_\ell, |y'_\ell(t)| \leq b_\ell, \ell = 1, \dots, 6 \right\}$$

a_ℓ, b_ℓ constantes positives telles que $K \neq \emptyset$.

Problème d'optimisation

$$\min_{y \in K} E(y)$$

- E continue, non convexe
- K compact de $Y = (C^0(0, T))^6$

Théorème

Il existe au moins une solution au problème d'optimisation

Temps

$$\delta = T/n, t_i = i\delta$$

$$y^i = y(t_i), u^n(x) = u(x; y(T))$$

Méthode des trapèzes

$$u^n(x) = \sum_{i=0}^n w_i q(x; y^i)$$

Fonction coût

$$E_\delta(y) = \frac{1}{2} \| u^n(x) - u_c(x) \|_{L^2(\Omega)}^2$$

Ensemble des paramètres admissibles

$$\mathcal{K}_\delta = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N; |y_\ell^i| \leq a_\ell, \frac{1}{\delta} |y_\ell^{i+1} - y_\ell^i| \leq b_\ell; i = 0, \dots, n, \ell = 1, \dots, 6 \right\}$$

Espace

Ω polygonal (rectangulaire), Ω_e quadrilatère

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^M \Omega_e$$

$$E_{\delta h}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{P_h} \int_{\Omega_e} (u_h^n(x) - u_c(x))^2 dx.$$

u_h^n approximation bilinéaire de u^n sur Ω_e .

$$E_{\delta h}(\mathbf{y}) = \frac{1}{8} \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^4 |\Omega_e| \left(u_h^n(x_e^j) - u_c(x_e^j) \right)^2.$$

Espace

Ω polygonal (rectangulaire), Ω_e quadrilatère

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^M \Omega_e$$

$$E_{\delta h}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{P_h} \int_{\Omega_e} (u_h^n(x) - u_c(x))^2 dx.$$

u_h^n approximation bilinéaire de u^n sur Ω_e .

$$E_{\delta h}(\mathbf{y}) = \frac{1}{8} \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^4 |\Omega_e| \left(u_h^n(x_e^j) - u_c(x_e^j) \right)^2.$$

Calcul du gradient

y contrôle, u^n variable d'état

Equation d'état :

$$F(u_j^n, y) = u_j^n - \sum_{i=0}^n w_i q(x^j; y^i) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Variable adjointe $p_j = p(x^j)$

$$p_j = \frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial u_j^n} = \sum_{e \in V_j} \frac{|\Omega_e|}{4} (u_j^n - u^*(x^j)), \quad j = 1, \dots, m$$

Gradient de $E_{\delta h}$

$$\frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial y^k} = \frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial y^k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial y^k} F(u_j^n, y) \cdot p_j = \sum_{j=1}^m w_k \frac{\partial q(x^j; y^k)}{\partial y^k} p_j$$

Calcul du gradient

y contrôle, u^n variable d'état

Equation d'état :

$$F(u_j^n, y) = u_j^n - \sum_{i=0}^n w_i q(x^j; y^i) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Variable adjointe $p_j = p(x^j)$

$$p_j = \frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial u_j^n} = \sum_{e \in V_j} \frac{|\Omega_e|}{4} (u_j^n - u^*(x^j)), \quad j = 1, \dots, m$$

Gradient de $E_{\delta h}$

$$\frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial y^k} = \frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial y^k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial y^k} F(u_j^n, y) \cdot p_j = \sum_{j=1}^m w_k \frac{\partial q(x^j; y^k)}{\partial y^k} p_j$$

Calcul du gradient

y contrôle, u^n variable d'état

Equation d'état :

$$F(u_j^n, y) = u_j^n - \sum_{i=0}^n w_i q(x^j; y^i) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

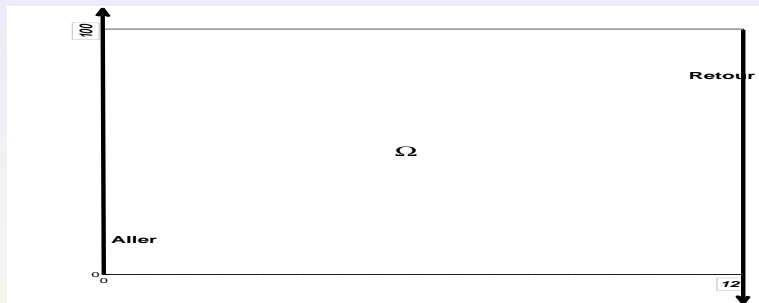
Variable adjointe $p_j = p(x^j)$

$$p_j = \frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial u_j^n} = \sum_{e \in V_j} \frac{|\Omega_e|}{4} (u_j^n - u^*(x^j)), \quad j = 1, \dots, m$$

Gradient de $E_{\delta h}$

$$\frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial y^k} = \frac{\partial E_{\delta h}(\mathbf{y})}{\partial y^k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial y^k} F(u_j^n, y) \cdot p_j = \sum_{j=1}^m w_k \frac{\partial q(x^j; y^k)}{\partial y^k} p_j$$

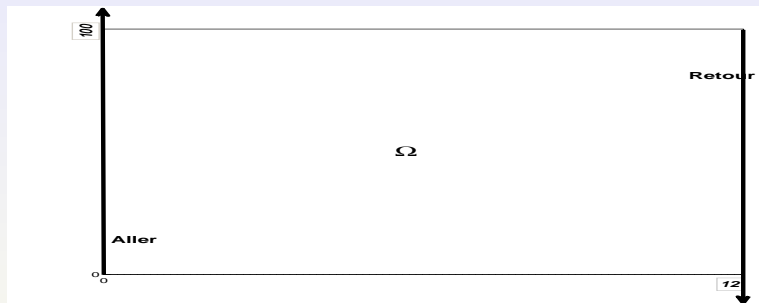
Problème d'application



$$\Omega = (0, 12) \times (0, 100)$$

- Dose consigne 80Kg/Ha
- Vitesse tracteur 10km/h, $t \in (0, 46.8) \cup (46.8, 93.6)$ en secondes
- Constantes nappe $\sigma_r = 0.85$, $\sigma_\theta = 19.3^\circ$

Problème d'application



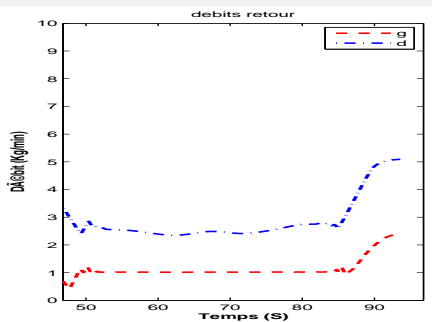
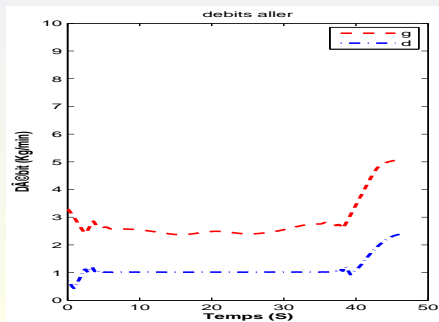
$$\Omega = (0, 12) \times (0, 100)$$

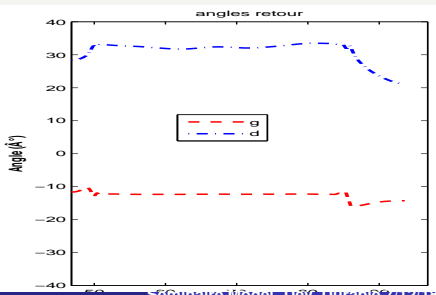
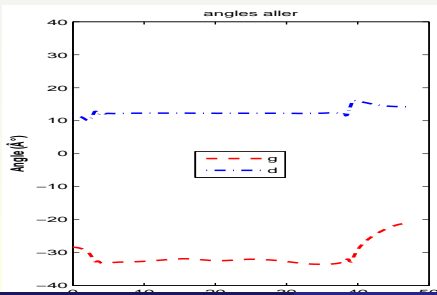
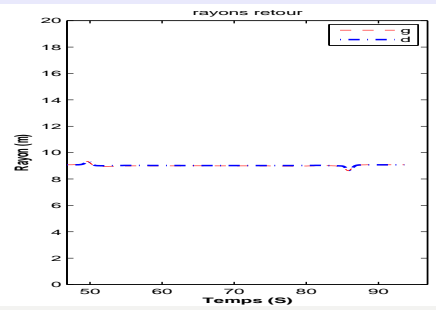
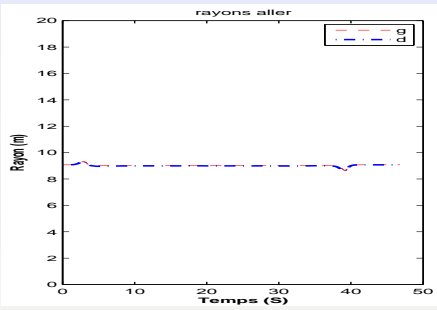
- Dose consigne 80Kg/Ha
- Vitesse tracteur 10km/h, $t \in (0, 46.8) \cup (46.8, 93.6)$ en secondes
- Constantes nappe $\sigma_r = 0.85$, $\sigma_\theta = 19.3^\circ$

Discrétisation

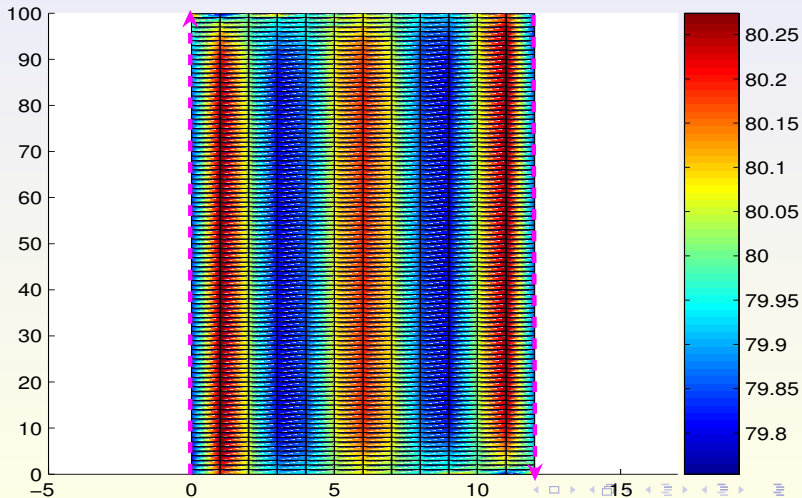
- Discrétisation : $\delta = 0.18s \implies 3132$ variables
- Ω_e carré d'1m de coté $\implies 1313$ points de calcul de dose

Solveur : IPOPT (L-BFGS+Points intérieurs, www.coin-or.org)





Carte de dose



Modélisation II

Epannage \equiv Diffusion

$$\partial_t u(x, t) - \nu \Delta u(x, t) = f(x, t) \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$

$$u(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T)$$

$$u(x, 0) = 0 \text{ dans } \Omega.$$